DIRECTION DE LA METEOROLOGIE NATIONALE
ECOLE NATIONALE DE LA METEOROLOGIE

CONCOURS EXTERNE 1993

D'ELEVE INGENIEUR DES TRAVAUX DE LA METEOROLOGIE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES (I)

Durée : 3 heures   Coefficient : 2

La notation prendra en compte la rigueur et la clarté des raisonnements et explications, ainsi que le soin apporté à la présentation.

M_n est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes; I désigne la matrice unité et 0 la matrice nulle de M_n.

I - 1) A toute matrice $A \in M_n$ de coefficients a_{ij} , on associe le nombre :

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$ appelé trace de A.

Démontrer que l'application tr ainsi définie est une forme linéaire.

2) Montrer que quelles que soient les matrices A et B appartenant à M_n : $\operatorname{tr}(A.B) = \operatorname{tr}(B.A)$

3) E étant un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$, de dimension n, rapporté à une base $(\mathcal{B}_0)$; un endomorphisme φ de E est défini par une matrice $A \in M_n$. Soit $(\mathcal{B}_1)$une nouvelle base de E, définie à partir de $(\mathcal{B}_0)$ par la matrice de passage P, de coefficients P_{ij}; l'endomorphisme φ est défini dans cette nouvelle base par une matrice A' que l'on exprimera en fonction de A et P.

Montrer que la trace d'une matrice est un invariant par tout changement de base.

4) Démontrer que si A a pour valeurs propres $\lambda_1 \ldots\ldots, \lambda_n$ et si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on désigne par S_k la trace de A^k on a :

$$S_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$$

II - Soit $\ell(A)$ la transposée de la matrice des cofacteurs de A.

On rappelle que le cofacteur du coefficient a_{ij} de A est égal à $(-1)^{i+j}$ det D_{ij}; $D_{ij} \in M_{n-1}$ étant la matrice obtenue en supprimant dans A la ième ligne et la jème colonne.

On rappelle également que si A est inversible on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \ell(A)$$

Par ailleurs, dans la suite du problème, le polynôme caractéristique de la matrice A s'écrira : $P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots\ldots + a_n$

1) Montrer que $\forall A \in M_n$, A commute avec $\ell(A)$

2) Montrer que $P'(\lambda) = \frac{dP}{d\lambda}$ peut s'écrire

$$P'(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(\lambda)}{\lambda - \lambda_i}$$

3) Soit $z \in \mathbb{C}$; on se propose de diviser $P(\lambda)$ par le polynôme du premier degré $(\lambda - z)$ tel que

$$P(\lambda) = (\lambda - z)(b_0 \lambda^{n-1} + b_1\lambda^{n-2} + \ldots\ldots\ldots + b_{n-1}) + b_n$$

a) Montrer que $\forall k \in \{1, 2, \ldots\ldots n\}$ il existe une relation de récurrence simple entre b_k et b_{k-1}.

b) En déduire alors $\forall k \in \{1, 2, \ldots\ldots, n\}$ l'expression de b_k en fonction des a_k et z.

c) Exprimer $P'(\lambda)$ sous la forme d'un polynôme de degré (n-1) dont les coefficients sont fonction des (a_i) et des (S_i).

d) Déduire alors la relation fondamentale :

$$\forall k \in \{1,2,\ldots\ldots n\} \quad S_k + a_1 S_{k-1} + \ldots\ldots + a_{k-1} S_1 + k\, a_k = 0$$

4) Lorsque $A \in M_n$ est inversible, calculer le déterminant de $\ell(A)$ et exprimer en fonction de A la matrice $\ell(\ell(A))$.

5) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, la matrice $\ell(\lambda I-A)$ peut s'écrire sous la forme $Q(\lambda) = \lambda^{n-1} B_0 + \lambda^{n-2} B_1 + \ldots + \lambda B_{n-2} + B_{n-1}$ où les matrices $B_k \in M_n$.

6) Démontrer que si $C_0, C_1, \ldots, C_k$ sont $(k + 1)$ matrices appartenant à M_n et si $\lambda \in \mathbb{C}$, la somme $\lambda^k C_0 + \lambda^{k-1} C_1 + \ldots + C_k$ est nulle

quel que soit λ, si et seulement si l'on a :

$$C_0 = C_1 = \ldots = C_k = 0$$

7) Calculer les matrices B_k définies au II 5) en fonction des puissances de A et des coefficients a_k du polynôme caractéristique $P(\lambda)$, puis démontrer que l'on a :

$$A^n + a_1 A^{n-1} + \ldots + a_{n-1} A + a_n I = 0$$

8) - a) Calculer $\ell(-A)$, puis $\ell(A)$ en fonction des puissances de A et des coefficients a_k.

b) En déduire la trace de $\ell(A)$ en fonction des a_k et des S_k.

c) Montrer que $\mathrm{tr}\left[\ell(A)\right]$ s'exprime à l'aide de l'un des a_k pour une valeur de k à préciser.

9) - a) Montrer que si α est valeur propre de A

$$R(\alpha) = (-1)^{n-1} (\alpha^{n-1} + a_1\alpha^{n-2} + \ldots + a_{n-1})$$

est valeur propre de $\ell(A)$.

b) Si α est de plus valeur propre non nulle de A, en déduire alors une relation entre $R(\alpha)$ et $\det(A)$.

III - a désigne un nombre réel donné, appartenant à $\left[-1,1\right]$; $\left\{ U_n(a) \right\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ est la suite numérique vérifiant les relations :

$$U_1(a) = 2a \; : \; U_2(a) = 4a^2 - 1$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ n > 2,\ U_n(a) = 2aU_{n-1}(a) - U_{n-2}(a)$$

1) On pose $U_{n-1}(a) = V_n(a)$ et $\begin{pmatrix} U_n(a) \\ V_n(a) \end{pmatrix} = X_n(a)$

Montrer qu'il existe une matrice $\Gamma_a \in M_2$ telle que

$\forall n > 2 \quad X_n(a) = \Gamma_a^{n-2} \; X_2(a)$

2) -a) Dans le cas particulier où a = 1, démontrer par récurrence à l'aide du II 7) que $\forall\, k \in \mathbb{N}^* \quad \Gamma_1^k = k\,\Gamma_1 - (k-1)\, I$

b) Calculer alors $X_n(1)$ et en déduire la valeur de $U_n(1)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

c) Retrouver ce résultat en utilisant la relation de récurrence définissant la suite $\left\{ U_n(a) \right\}$.

3) Calculer dans les mêmes conditions $U_n(-1)$

a) En exprimant Γ_{-1}^{n-2}

b) En utilisant directement la relation de récurrence définissant $\left\{ U_n(a) \right\}$

4) Dans le cas général où $a \in \left] -1, 1 \right[$, on pose $\theta = \text{Arc} \cos a$.

a) Calculer en fonction de θ, les valeurs propres λ_1 et de λ_2 de la matrice $\Gamma_a \in M_2$.

b) Vérifier que la matrice $P = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 1 \\ 1 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$ est une matrice de passage permettant de diagonaliser Γ_a et calculer Γ_a^k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

c) Vérifier alors que $U_n(a)$ peut s'exprimer en fonction de θ sous la forme $U_n(a) = \dfrac{\sin (n+1)\,\theta}{\sin \theta}$